220

Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'étude des solutions en dimensions 1 et 2.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}^*$

I] Théorie des équations différentielles ordinaires

1] Mise en place du problème

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{K}^N$ ouvert, $f: \Omega \to \mathbb{K}^N$ et $(t_0;y_0)\in\Omega$, $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle.

I.1

Définition 1: On dit que $y'=f(t;y)$ est une équation différentielle résolue par rapport à sa dérivée relativement à t.
Une solution de cette équation est une fonction dérivable y définie sur un intervalle $I\subseteq\mathbb{R}$ tq: $y'(t)=f(t;y(t))$, $\forall t\in I$

Exemple 2: $y'=2t$; $ty'-2y=0$ et $(y')^2=4y$ sont des équations différentielles dont $y(t)=t^2$ est une solution.

I.2

Définition 3: Une équation différentielle est dite d'ordre n si elle est de la forme: $y^{(n)}=f(t;y;\dots;y^{(n-1)})$ avec $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times(\mathbb{K}^N)^n$ un ouvert.

Remarque 4: Si $N=1$, alors on parle d'équation scalaire. Sinon, on parle d'équation vectorielle.

[Ber]

Proposition 5: Soit $y: I\to\mathbb{K}^N$
Alors: y est solution de $\begin{cases} y'=f(t;y)\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$ ssi y est continue, $\forall t\in I$, $(t;y(t))\in\Omega$ et $\forall t\in I$, $y(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(s;y(s))ds$

I.3

Définition 6: On dit que y est solution maximale (resp. globale) de $y'=f(t;y)$ si elle n'admet pas de prolongements (resp. si $\Omega=I\times\Omega'$ alors y est définie sur I tout entier).

Proposition 7: Une solution globale est maximale.
La réciproque est fausse.

Contrexemple 8: Soit $f(t;y)=y^2$ et $y(0)=y_0>0$, alors $y(t)=\frac{y_0}{1-y_0t}$ est solution maximale sur $]-\infty;\frac{1}{y_0}]$ non-globale sur $\mathbb{R}$.

2] Existence et unicité des solutions maximales

On suppose par la suite $\Omega = I\times\Omega'$ ouvert avec $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle.

III.1

Définition 9: f est dite localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si: $\forall(\bar t;\bar y)\in I\times\Omega'$, $\exists C_0=[\bar t-T;\bar t+T]\times\bar{B}(\bar y;r)$ avec $T,r>0$, $\exists k\geq0 \mid \forall(t;y_1);(t;y_2)\in C_0$, $\|f(t;y_1)-f(t;y_2)\|\leq k\|y_1-y_2\|$

Exemple 10: Les fonctions $\mathcal{C}^1$ sont localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

Théorème 11: (de Cauchy-Lipschitz local) Si f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable
Alors: $\exists! y: I\to\mathbb{K}^N$ solution maximale de $\begin{cases}y'=f(t;y)\\y(t_0)=y_0\end{cases}$ avec $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle ouvert.

III.2

Définition 12: f est dite globalement lipschitzienne par rapport à la variable y, uniformément par rapport à la variable t si pour tout $J\subseteq I$ intervalle compact, $\exists k>0 \mid \forall(t;y_1),(t;y_2)\in J\times\Omega'$,
$\|f(t;y_1)-f(t;y_2)\|\leq k\|y_1-y_2\|$

[Ber]

Lemme 13: Soit $\alpha,\beta\in[0;+\infty[$, $r_0\in]0;+\infty]$, $I=[t_0-\alpha;t_0+\beta]$, $f: I\times\bar{B}(y_0;r_0)\to\mathbb{K}^N$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à y et uniformément par rapport à t.
Soit $\Phi: \begin{array}{ccc}\mathcal{C}(I;\bar B(y_0;r_0)) & \to & \mathcal{C}(I;\bar B(y_0;r_0))\\ y & \mapsto & \left[\begin{array}{c} I\to \bar B(y_0;r_0)\\ t\mapsto y_0+\int_{t_0}^t f(s;y(s))ds\end{array}\right]\end{array}$
Alors: $\exists! y: I\to\mathbb{K}^N$ solution globale telle que $y(t_0)=y_0$.

Théorème 14: (de Cauchy global) Si f continue, globalement lipschitz par rapport à y et uniformément par rapport à t
Alors: $\exists! y: I\to\mathbb{K}^N$ solution globale de $\begin{cases}y'=f(t;y)\\y(t_0)=y_0\end{cases}$

Corollaire 15: (Cauchy-Lipschitz linéaire) Soit $A\in\mathcal{C}(I;\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$, $B\in\mathcal{C}(I;\mathbb{K}^N)$.
Alors: $\exists! y: I\to\mathbb{K}^N$ solution globale de $\begin{cases}y'(t)=A(t)y(t)+B(t)\\y(t_0)=y_0\end{cases}$

3] Passage du maximal au global

I.4

Lemme 16: (de Grönwall) Soit $a\in\mathbb{R}$, $u,v\in\mathcal{C}(I;\mathbb{R})$ tels que $u,v\geq0$ et $\forall t\in I$, $u(t)\leq a+\left|\int_{t_0}^t v(s)u(s)ds\right|$
Alors: $\forall t\in I$, $u(t)\leq a\exp\left[\left|\int_{t_0}^t v(s)ds\right|\right]$

[Ber] III.8

Théorème 17: (de sortie de tout compact) Si f continue, localement lipschitz par rapport à y, soit $y:]c;d[\to\mathbb{K}^N$ solution maximale de $y'=f(t;y)$
Alors: $\forall K\subseteq I\times\Omega'$ compact, $\exists V\in\mathcal{V}_d \mid \forall t\in V$, $(t;y(t))\notin K$
ie $(t;y(t))$ sort de tout compact de $I\times\Omega'$ lorsque $t\to d$.

[Ber] III.8

Corollaire 18 : (théorème des bouts) En reprenant les notations précédentes, si $I =]a;b[$ et $d<b$.
Alors : $\|y(t)\| \xrightarrow[t\to d]{} +\infty$ i.e. si $t\mapsto y(t)$ est bornée, alors $d=b$

[ZQ]

Définition 19 : Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite propre si $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact ie $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$

Application 20 : (théorème d'Hadamard-Lévy) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$
Alors : f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme global sur $\mathbb{R}^n$ ssi f est propre et $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $d_xf \in GL(\mathbb{R}^n)$

II] Résolution d'équations différentielles

1) Cadre linéaire

Soit $f : \begin{array}{l} I\times\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N \\ (t;y) \mapsto A(t)y+B(t) \end{array}$ avec $A\in\mathcal{C}(I;\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$, $B\in\mathcal{C}(I;\mathbb{K}^N)$ et $(t_0;y_0)\in I\times\mathbb{K}^N$.

II.3

Proposition 21 : L'ensemble S_H des solutions maximales de $y'=A(t)y$ est un sous-ev de $\mathcal{C}(I;\mathbb{K}^N)$

Corollaire 22 : L'ensemble S des solutions de $y'=A(t)y+B(t)$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de direction S_H.

Proposition 23 : Si $N=n=1$, alors la solution maximale de $y'=a(t)y+b(t)$ telle que $y(t_0)=y_0$ est :

$$y(t) = y_0 \exp\left[\int_{t_0}^t a(s)ds\right] + \int_{t_0}^t b(s)\exp\left[\int_s^t a(\sigma)d\sigma\right]ds$$

[Ber]

Exemple 24 : La solution maximale de $y'+y=e^t$ avec $y(1)=0$ est : $y(t) = \dfrac{e^t - e^{-t+2}}{2}$

II.4

Proposition 25 : Les solutions de $y'=A(t)y$ avec $y(t_0)=y_0$ sont : $y(t)=e^{(t-t_0)A}y_0$

II.5

Exemple 26 : La solution de $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=2x+y \end{cases}$ avec $\begin{cases} x(1)=2 \\ y(1)=1 \end{cases}$ est :
$x(t)=\frac{1}{2}\left[3e^{3(t-1)}+e^{-(t-1)}\right]$ et $y(t)=\frac{1}{2}\left[3e^{3(t-1)}-e^{-(t-1)}\right]$.

II.6

Proposition 27 : Si $A\in\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ est constante, alors on cherche les solutions de la forme $y(t)=e^{tA}C(t)$ avec $C\in\mathcal{C}(I;\mathbb{K}^N)$.
On trouve : $y(t)=e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)\,ds$

Corollaire 28 : Pour résoudre $y''+a_1(t)y'+a_0(t)y=b(t)$ avec $(a_0;a_1;b)\in\mathcal{C}(I;\mathbb{K}^N)$ les solutions sont de la forme : II.6 [Ber]
$y=\lambda y_1+\mu y_2$ avec $\begin{cases} \lambda' y_1+\mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1'+\mu' y_2' = b \end{cases}$

Exemple 29 : La solution maximale de $y''-2y'+y=e^t$ avec $y(-1)=0$, $y'(-1)=1$ est : $y(t)=\left[\frac{t^2}{2}+t(e+1)+e+\frac{1}{2}\right]e^t$

2) EDO à variables séparées, homogènes

Définition 30 : On dit que $y'=f(t;y)$ est à variables séparables si : $\forall t,y\in\mathbb{R}$, $f(t;y)=g(y)h(t)$ IV.2

Proposition 31 : Soit $\Omega := \{y\in\mathbb{R} \mid g(y)\neq 0\}$ et $]y_1;y_2[\subset\Omega$, soit G primitive de $\frac{1}{g}$ et H primitive de h.
Alors : Les solutions de $y'=f(t;y)$ sont de la forme : $y(t)=G^{-1}(H(t)+C)$ [Ber]

Exemple 32 : Les solutions de $t\ln(t)y'-y-1=0$ sont : $y_C(t)=-1+C\ln(t)$ avec C constante.

Définition 33 : On dit que $y'=f(t;y)$ est homogène si : $f(t;y)=g\left(\frac{y}{t}\right)$ avec g continue.

Proposition 34 : Pour $t\neq 0$, par un changement de variable, on se ramène à une équation différentielle séparable : $z=\frac{y}{t}$,
$z'=\dfrac{g(z)}{t}-\dfrac{z}{t}$

Exemple 35 : Les solutions de $t^2y'-2ty+t^2=0$ sont :
$y_{C,K}(t)=\begin{cases} t+Ct^2 & \text{pour } t\geq 0 \\ t+Kt^2 & \text{pour } t<0 \end{cases}$ avec C,K constantes.

III] Étude qualitative

1] Équations autonomes

V.1 [Ber]

Définition 36 : Une équation différentielle est dite autonome si elle est de la forme : $y'=f(y)$

Remarque 37 : Pour $N=1$, une équation autonome est une équation à variables séparables.

Définition 38 : La trajectoire d'une solution maximale $y:\Omega\to\mathbb{R}^N$ de $y'=f(y)$ est : $\{y(t)\mid t\in I\}$. On appelle $f:\Omega\to\mathbb{R}$ un champ de vecteurs.

Définition 39 : Pour $N=2$, $f(x;y)=(f_1(x;y);f_2(x;y))$, l'isocline verticale est : $\{(x;y)\in\Omega \mid f_1(x;y)=0\}$ où le vecteur $f(x;y)$ est vertical.
À $m\in\mathbb{R}$ fixé, on appelle isocline de pente m l'ensemble :
$$\{(x;y)\in\Omega \mid f_2(x;y)=m\,f_1(x;y)\}$$
Pour $m=0$, on obtient l'isocline horizontale : $\{(x;y)\in\Omega \mid f_2(x;y)=0\}$.

Exemple 40 : On peut faire une étude qualitative de
$$\begin{cases} x'=y+x-1 \\ y'=2x-y \end{cases} \quad \text{(ANNEXE)}$$

2] Stabilité des solutions

VI.1 [Ber]

Soit f continue, localement lipschitz par rapport à y et $(x_0;y_0;J)$ solution maximale de $\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$

Définition 41 : La solution $y_{t_0;y_0}$ est stable (à droite) si :
(i) $\exists \alpha>0 \mid \forall y_1\in\Omega'$, $\|y_1-y_0\|\le\alpha \Rightarrow \forall t\ge t_0$, $y_{t_0;y_1}(t)$ bien définie
(ii) $\forall \varepsilon>0$, $\exists \eta\in]0;\alpha] \mid \forall y_1\in\Omega'$, $\|y_1-y_0\|\le\eta \Rightarrow \forall t\ge t_0$, $\|y_{t_0;y_1}(t)-y_{t_0;y_0}(t)\|\le\varepsilon$

La solution $y_{t_0;y_0}$ est asymptotiquement stable si :
(i) $y_{t_0;y_0}$ est stable
(ii) $\exists \delta>0 \mid \forall y_1\in\Omega'$, $\|y_1-y_0\|\le\delta \Rightarrow y_{t_0;y_1}(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{} y_{t_0;y_0}(t)$

[Ber] VI.2

Remarque 42 : La stabilité se traduit par : de petites perturbations de la donnée initiale conduisent à de faibles variations de la solution. La stabilité asymptotique demande, en plus, que la solution perturbée tende vers la solution initiale.

Exemple 43 : Les solutions de $y'=y$: $y_{t_0;y_0}(t)=y_0e^{t-t_0}$ sont asymptotiquement stables à gauches mais pas stable à droite.

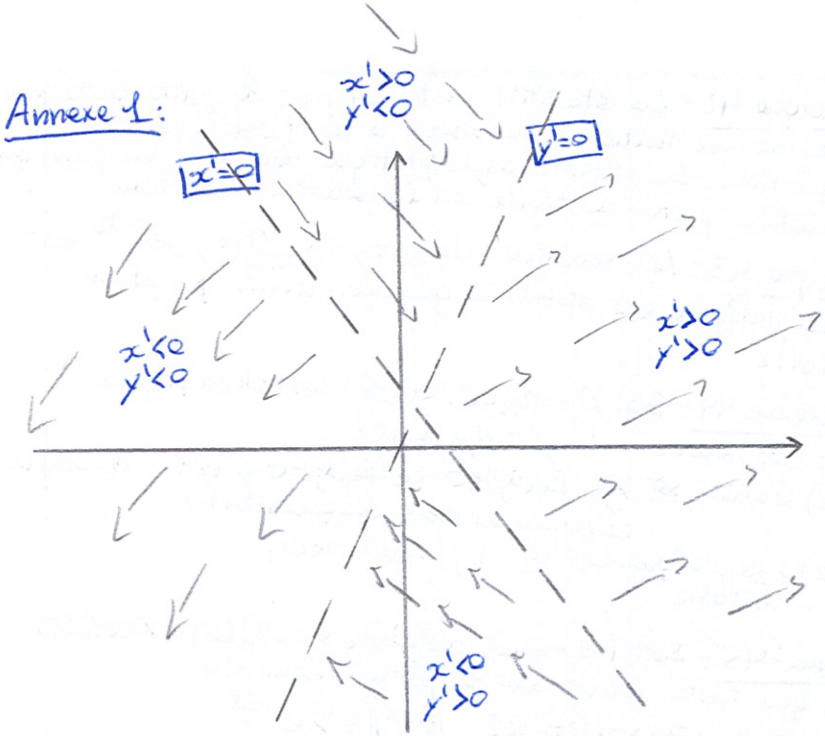
Théorème 44 : Soit $A\in\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ et (λ_j) ses valeurs propres.
Alors : Les solutions de $y'=Ay$ sont :
(1) stables ssi $\forall j$, $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0$ ou ($\mathrm{Re}(\lambda_j)=0$ et le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable)
(2) asymptotiquement stable ssi $\forall j$, $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0$

[Isen]

Lemme 45 : Soit $\|\cdot\|$ norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que toutes ses vp sont de partie réelle <0.
Alors : $\exists\alpha>0 \mid \exists\lambda>0 \mid \forall t\in\mathbb{R}_+$, $\|e^{tA}\|\le\lambda e^{-\alpha t}$

Théorème 46 : (de Liapounov) Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ tel que $f(0)=0$ et d_0f a toutes ses vp de partie réelle <0.
Alors : 0 est point d'équilibre stable du système $\begin{cases} y'=f(y) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$

Annexe 1 :



étude qualitative de l'exemple 40 : $\begin{cases} x' = y + x - 1 \\ y' = 2x - y \end{cases}$

Références :

[Ber] Équations différentielles — Berthelin

[ZQ] Éléments d'analyse — Zuily

[Isen] L'oral d l'agrégation de mathématiques — Isenmann